Applications

Vocabulaire sur les applications

Applications

Fonction : : On appelle fonction la donnée de deux ensembles E, F et d'une relation f de E vers F telle que tout élément de E est en relation avec au plus un élément de F.

Lorsque $x \in$ E est en relation avec $y \in$ F par la relation f, on note : : $y = f(x)$ à la place de xfy.

On écrit alors $x \mapsto f$ pour dire que x est en relation avec $f(x)$.

E est **l'ensemble de départ** et F est **l'ensemble d'arrivée**

$\Gamma = \{(x,y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F} : y = f(x)\}$ est : : le graphe de la fonction

On introduit usuellement ces notations :

— D_f est l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec un élément de F, c'est l'ensemble de définition de la fonction f, $\mathrm{D}_f = \{x \in \mathrm{E} : \exists! y \in \mathrm{F}, y = f(x)\}$
— L'image de x par f est : : l'élément $f(x)$ de F pour tout $x \in \mathrm{D}_f$
— Un antécédent de y par f est : : tout élément $x \in$ E tel que $y = f(x)$, si $y \in$ F

L'ensemble des fonctions de E vers F est noté F(E,F)

En pratique, une fois que l'ensemble définition est déterminé, on envisage des cas où l'ensemble de départ est contenu dans cet ensemble de définition.

On appelle application une fonction f de E vers F telle que tout élément de E est en relation avec exactement un élément de F ce qui revient à dire que $\mathrm{E} \subset \mathrm{D}_f$

On la note comme une fonction, on comprend que pour tout élément $x \in$ E, on fait correspondre un seul élément de F, noté $f(x)$

L'ensemble des applications de E vers F est noté : : F^{E}

Images directes et réciproques

Définitions On appelle image directe de A par f l'ensemble : : $f(\mathrm{A}) = \{f(x) : x \in \mathrm{A}\} = \{y \in \mathrm{F} : \exists x \in \mathrm{A}, y = f(x)\}$

On appelle image réciproque de B par f : : $f^{-1}(\mathrm{B}) = \{x \in \mathrm{E}, f(x) \in \mathrm{B}\}$

Propriétés on note $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ et $(\mathrm{A},\mathrm{A}') \subset \mathrm{E}^2$ et $(\mathrm{B},\mathrm{B}') \subset \mathrm{F}^2$ - $f(\mathrm{A} \cup \mathrm{A}') = f(\mathrm{A}) \cup f(\mathrm{A}')$ - $f^{-1}(\mathrm{B} \cup \mathrm{B}') = f^{-1}(\mathrm{B}) \cup f^{-1}(\mathrm{B}')$ - $f^{-1}(\mathrm{B} \cap \mathrm{B}') = f^{-1}(\mathrm{B}) \cap f^{-1}(\mathrm{B}')$

Composition

Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications, $g \circ f$ est leur composition : : $g \circ f : {}^{\mathrm{E} \to \mathrm{G}}_{x \mapsto g(f(x))}$

La composition est **associative**, possède un **élément neutre** mais n'est pas **commutative**.

Restrictions, prolongement d'applications

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. Si A est une partie de E, on appelle restriction de f sur A l'application notée $f_{|\mathrm{A}}$ définie par : : $f_{|\mathrm{A}} : {}^{\mathrm{A} \to \mathrm{F}}_{x \mapsto f(x)}$.

On dit que f est un prolongement d'une application g lorsque : : g est une restriction de f.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Injectivité

Définition Une application est injective si : : tout image a au plus un antécédent, si elle a “injecté” ses antécédents dans l'ensemble des images. Ce qui revient à

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, f(x) = f(y) \implies x = y$$

ou encore

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

Propriétés on note $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ et $g \in \mathrm{G}^{\mathrm{F}}$ - Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ **est injective** - Si $g \circ f$ est injective, alors f **est injective**

Voir la démonstration

Surjectivité

Définition Une application est surjective si : : elle est injective superchargée, *ie* l'injection de E dans F s'est produite à fond voir plus, que chaque image a au moins un antécédent, ce qui revient à

$$\forall y \in \mathrm{F}, \exists x \in \mathrm{E}, y = f(x)$$

Propriétés on note $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ et $g \in \mathrm{G}^{\mathrm{F}}$ - Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ **est surjective** - Si $g \circ f$ est surjective, alors g **est surjective**

Voir la démonstration

Bijectivité

Définition Une application est bijective si : : elle est injective et surjective, elle est juste parfaite quoi, chaque image à exactement un antécédent, il y a une correspondance $1:1$ entre les images et les antécédents, c'est très cool, ce qui revient à

$$\forall y \in \mathrm{F}, \exists! x \in \mathrm{E}, y = f(x)$$

Théorème Une application $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ est bijective si : : il existe une application de F dans E appelée application réciproque de f et notée f^{-1}, telle que $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$

Ce qui revient à dire qu'une application est bijective s'il existe une application réciproque qui permet de passer des images aux antécédents de cette première tout en conservant les ensembles et qui donnent donc l'identité si on les compose.

e^x est donc bijective car : : $\ln(e^x) = x$ et que les **ensembles se conservent** (De $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_*^+$)

Propriétés On note $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ et $g \in \mathrm{G}^{\mathrm{F}}$ deux bijections - f^{-1} est une bijection entre F et E dont la réciproque est f - $g \circ f$ est une bijection entre E et G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Voir le PDF
