MPSI — Lycée Pierre-Gilles de Gennes
Anako Jeannin-Mallet — Janvier 2023

Équations différentielles

On aura une approche calculatoire.

Introduction et objectifs

Une équation différentielle est une équation dans laquelle une fonction inconnue et une ou plusieurs de ses dérivés apparait.

On appelle équation différentielle linéaire une équation différentielle de la forme $a_n(x)y^{(n)} + ... + a_0(x)y = b(x)$ ces équations différentielles sont mieux connues, on verra ici des solutions à des équations du premier ($n = 1$) et deuxième ordre à coefficients (a_n) constants et second membre ($b(x)$) particulier (de la forme $\mathrm{P}(x)e^{kx}$).

/ !\ La théorie n'est valide que pour les ÉDL normalisés sur des intervalles

ÉDL d'ordre 1

Soit I un intervalle{{% sidenote %}}Intervalle est le seul mot français qui est masculin et se termine par "alle" !{{% /sidenote %}} de $\mathbb{R}$ et $a,b,\alpha,\beta,\gamma \in \mathcal{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{K})$.

- On commence par résoudre l'ÉDL normalisé homogène qui a pour solution $\mathrm{S}_h = \left\{ \begin{smallmatrix} \mathrm{I} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \lambda e^{-\mathrm{A}(x)} \end{smallmatrix}, \lambda \in \mathbb{K}, \mathrm{A} = \int^x a(t)dt \right\}$
- On détermine une solution particulière de l'équation complète
  - Si b est de la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$, on peut utiliser le principe de superposition : on trouve une solution particulière y_{pi} de $y' + a(x)y = b_i(x)$ pour tout i ; alors $y_p = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_{pi}$
  - Si $a \in \mathbb{K}$ est une constante et si $b(x) = \mathrm{P}(x)e^{kx}$ avec P une fonction polynomiale de degré p et $k \in \mathbb{K}$, alors on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \mathrm{Q}(x)e^{kx}$ où Q est une fonction polynomiale de degré p si $a \neq -k, p+1$ sinon.
  - Avec la méthode de variation de la constante : on cherche y_p sous la forme $y_p(x) = \lambda(x)e^{-\mathrm{A}(x)}$

Remarque : Les fonctions trigonométriques sont des exponentielles combinés.

- L'ensemble des solutions est alors $\mathrm{S} = \mathrm{S}_h + y_p$

On peut affiner si l'on a les conditions initiales : c'est un problème de Cauchy.

Notons qu'il faut bien justifier pour recoller si l'on a $a(x)$ qui s'annule.

ÉDL d'ordre 2

- On résout l'équation normalisé homogène en résolvant d'abord l'équation caractéristique, on note r,r' les racines de l'ÉC.
  - Si les coefficients sont complexes
    - Si $\Delta \neq 0$, les solutions homogènes sont de la forme $\lambda e^{rx} + \mu e^{r'x}, (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$
    - Si $\Delta = 0$, les solutions homogènes sont de la forme $(\lambda x + \mu)e^{rx}, (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$
  - Si les coefficients sont réels
    - Si $\Delta > 0$, les solutions homogènes sont de la forme $\lambda e^{rx} + \mu e^{r'x}, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$
    - Si $\Delta = 0$, les solutions homogènes sont de la forme $(\lambda x + \mu)e^{rx}, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$
    - Si $\Delta < 0$, les solutions homogènes sont de la forme $e^{\Re(r)x}(\lambda \cos(\Im(r)x) + \mu \sin(\Im(r)x)), (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$
- On détermine une solution particulière
  - Si le second membre est de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{P}_i(x)e^{k_i x}$, on peut simplifier les calculs avec le principe de superposition : $y_p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_{pi}$
  - Sinon on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \mathrm{Q}(x)e^{kx}$ où Q est une fonction polynomiale de degré $p + n$ où n est le nombre de fois où k est racine de l'ÉC.
- L'ensemble des solutions est alors $\mathrm{S} = \mathrm{S}_h + y_p$

On peut affiner si l'on a les conditions initiales : c'est un problème de Cauchy.

Voir le PDF