# Fonctions réelles : généralités

Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont faciles à étudier notamment grace à l'existence de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

## Vocabulaire sur les fonctions, techniques d'étude de fonctions

### Dériver

$x \to \frac{1}{x^n}$ Donne : $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

Or la primitive de $x^{-n}$ est $\frac{x^{-n+1}}{-n+1}, n \neq 1$

Si $n = 1$ : la primitive de $\frac{1}{x^1} = x^{-1} = \ln(|x|)$ (sur $\mathbb{R}$)

### Intervalles

I est un intervalle si $\forall(a,b) \in \mathrm{I}$, tout point de C entre $a$ et $b$ est aussi dans I

Il est important de travailler sur un interval bien défini, deux intervals différent pour une même fonction peut changer complétement son comportement.

**Théorème** Soit I un interval, soit $f$ une fonction dérivable sur I. Si $f' = 0$ sur I, alors $f$ est constante sur I

### Grands théorèmes

#### Continuité

**Théorème des Valeurs Intermédiaires (T.V.I)** Soit $\mathrm{I}$ un interval de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathrm{I}$

$f(\mathrm{I})$ est un interval *ie* pour tous points, $f(a)$ et $f(b) \in f(\mathrm{I})$ ;

Toutes valeur $t$ entre $f(a)$ et $f(b)$ est aussi dans $f(\mathrm{I})$, *ie* une valeur prise par $f$ *ie* il existe $\mathrm{C} \in \mathrm{I}, f(\mathrm{C}) = t$

Note : 0 est une valeur intermédiaire privilégié

Résoudre : $f(x) = g(x)$

Si $f$ et $g$ sont continues, cela revient à dire que 0 est une valeur prise par $f - g$

**Théorème de la bijection bicontinue** Soit $\mathrm{I}$ un interval de $\mathbb{R}$ $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathrm{I}$ :

Si $f$ est strictement monotone : : $f$ est bijective de $\mathrm{I}$ sur $f(\mathrm{I})$, de plus $f^{-1}$ est continue sur $f(\mathrm{I})$

#### Théorème (dérivabilité d'une bijection réciproque)

Soit $\mathrm{I}$ un interval, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue et bijective de $\mathrm{I}$ sur $f(\mathrm{I})$

Note : $f^{-1} : {}^{f(\mathrm{I}) \to \mathrm{R}}_{\quad y \to f^{-1}(y)}$ est bien définie

En quels point y-est-elle dérivable et alors que vaut $(f^{-1})'(y)$ ?

Si $f$ est dérivable en $x_0 \in \mathrm{I}$ et si $f'(x_0) \neq 0$

Alors $f^{-1}$ est dérivable en $f(x)$ et : : $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Si on note $y_0 = f(x_0) \Longleftrightarrow x_0 = f^{-1}(y_0)$

$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$

#### Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

Alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

### Caractérisation des fonctions monotones et constantes

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. On note $\mathcal{Z}(f') = \{x \in \mathrm{I}, f'(x) = 0\}$. C'est l'ensemble des points de $i$ où $f'$ s'annule. Alors :

- $f$ est constante sur I $\iff f'(x) = 0, \forall x \in \mathrm{I}$.
- $f$ est (dé)croissante sur I $\iff f'(x)(\leqslant) \geqslant 0, \forall x \in \mathrm{I}$
- $f$ est strictement (dé)croissante si l'inégalité précédente est vraie et si $\mathcal{Z}(f')$ ne contient aucun intervalle non vide et non réduit à un point.

Voir le PDF

---