Grand oral de maths

Quelle matrice pour modéliser des rotations ? *(19/20)*

Plan détaillé

—

Intro

Bonjour, je m'appelle Anako Jeannin-Mallet. Nous allons voir comment l'on peut exprimer la rotation de points et de vecteurs dans le plan à l'aide de matrices. Pour cela nous allons faire appel à de la trigonométrie et un peu d'algèbre linéaire. Modéliser des rotations est important pour beaucoup de domaines comme la physique quantique, les circuits électriques, l'optique, en géologie ou les jeux vidéo. Je vais vous présenter un début de réflexion sur la matrice rotation que je pourrais approfondir plus tard dans les questions si vous le souhaitez.

—

Points, vecteur

Un vecteur peut être vu comme une fonction qui associe une image à un point. Par exemple, si on prend un point A, qu'on lui applique un vecteur $\vec{v}$ on obtiendra un point B. Le point A a été transformé par le vecteur $\vec{v}$.

—

Vecteur, vecteur

Mais que ce passe-t-il si l'on applique un vecteur à un autre vecteur ? Si on transforme une transformation ? On obtient un troisième vecteur. Avec deux vecteurs, on peut donc créer n'importe quel vecteur, donc n'importe quel point. C'est le principe de la combinaison linéaire : Un certains nombres de fois un vecteur plus un autre nombre de fois un vecteur différent nous permettra de trouver n'importe quel vecteur ainsi n'importe quel point.

—

Base de l'espace

Ces deux vecteurs sont nommés base de l'espace puisqu'ils sont source de tout vecteur ou point dans le plan. On choisit généralement des vecteurs de 1 de longueur, dont la norme vaut 1 et orthogonaux, car cela facilite les calculs. On appelle un repère orthonormé un repère construit à partir de cette base. Ces deux vecteurs sont habituellement nommés $\vec{i}$ et $\vec{j}$. La *figure D* en est un exemple. La notation usuelle pour les vecteurs est sur la *figure A* de la feuille. La notation pour une base est une matrice comme vous pouvez le voir sur la *figure B* de la feuille. La matrice identité, représentée *figure C*, est la matrice qui représente la base d'un repère orthonormée, en effet, on peut voir qu'elle donne les coordonnées $(1;0)$ au vecteur $\vec{i}$ et $(0;1)$ au vecteur $\vec{j}$ ce qui revient à dire que le vecteur $\vec{i}$ est horizontal et d'un de longueur et le vecteur $\vec{j}$ vertical et de norme 1. Nous allons d'abord essayer d'effectuer une transformation simple, afin de comprendre le fonctionnement des transformations. Par exemple, voyons voir ce qui se passe lorsqu'on transforme cette base : si au lieu de prendre la matrice identité comme base, on prend, par exemple, la matrice représenté *figure F* avec donc un vecteur $\vec{i}$ inchangé est un vecteur $\vec{j}$ qui est aux coordonnées $(1;1)$.

—

Transformations

On a alors une transformation, une transvection, comme vous pouvez le voir sur la feuille, on passe d'un état initial avec la *figure E* à un état transformé *figure G*. En changeant les coordonnées de $\vec{j}$, le point M a été transformé. En effet, M est toujours égal à deux fois la transformation du vecteur $\vec{j}$ plus le vecteur $\vec{i}$, vous pouvez voir cela à la *figure G*. Si l'on peut faire des transformations simples comme celle-là, on peut également essayer de faire des rotations.

—

Rotations

Pour cela, nous allons devoir trouver une formule qui nous donne des bases du plan correspondant à des rotations à partir d'une base orthonormée. Une base étant constitué de deux vecteurs, cherchons d'abord à exprimer les coordonnées d'un vecteur en fonction d'un angle α. On peut voir cela avec la *figure I*. On se rend compte que les coordonnées x du vecteur $\vec{i}$ peuvent être exprimées à l'aide de trigonométrie, c'est-à-dire par la relation entre les distances et angles dans les triangles. En effet, le vecteur forme un triangle rectangle dans le cercle trigonométrique. On trouve alors $\cos(\alpha)$. Si l'on applique la même logique pour y puis pour le vecteur $\vec{j}$, on trouve la matrice rotation représentée *figure I*.

—

Conclusion

Grâce à cette matrice rotation, on peut facilement démontrer un certains nombres de propriété trigonométriques, comme $\sin^2 + \cos^2 = 1$ ou $\cos(a+b)$ voir le $\sin(a+b)$. J'ai dressé une esquisse de raisonnement sur la matrice rotation, mais je n'ai pas démontré ce résultat, je suis à votre disposition pour approfondir ou démontrer ce raisonnement. Merci à vous pour votre attention.

Voir le PDF

_