Méthodes de démonstrations

Ce document présente des méthodes usuelles qui peuvent être utiles dans des démonstrations courantes.

Contraposé

Si on a du mal à démontrer une propriété, on peut essayer de **démontrer sa contraposée**

C'est-à-dire ne pas démontrer $\mathrm{P} \implies \mathrm{Q}$ mais $\neg \mathrm{Q} \implies \neg \mathrm{P}$

Absurde

On montre un énoncé P en montrant que : :$\neg$P aboutit à une contradiction

Récurrence

Récurrence simple

On **initialise** la démonstration avec **le plus petit entier possible** du domaine de définition de n que l'on oublie pas de fixer

On fait **l'hérédité** : on montre que si $\mathrm{P}(n)$ est vrai, alors $\mathrm{P}(n+1)$ l'est aussi. Pour ça, il peut être utile de **marquer** $\mathrm{P}(n)$ **et** $\mathrm{P}(n+1)$ **côte à côte** et chercher comment **faire le lien entre les deux.**

On peut conclure en **exhibant** les cas qu'on avait éventuellement exclus de l'ensemble de définition de n et avec une petite phrase.

Récurrence forte

C'est le même principe que la récurrence sauf que **l'on a plusieurs hypothèses de récurrence.**

On cherche donc à montrer que $\mathrm{P}(0),\mathrm{P}(1),\ldots,\mathrm{P}(n) \implies \mathrm{P}(n+1)$

Ce qui revient à faire une **récurrence simple** sur $\mathrm{H}(n)$ **: "**$\mathrm{P}(0),\mathrm{P}(1),\ldots,\mathrm{P}(n)$**"**

Analyse-synthèse

— Phase d'analyse : : on cherche à trouver la forme de ce que l'on cherche
— Phase de synthèse : : on part de la forme trouvée et on regarde si ça marche

Disjonction

Disjonction : : on examine tous les cas possibles pour montrer que la propriété est vraie

Existence

Existence simple

Pour prouver un énoncé du type $\exists x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$, on peut :

— Utiliser un **exemple**
— Utiliser un **théorème d'existence**

Existence large

Pour prouver un énoncé du type $\forall x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$

— On fixe $x \in \mathrm{E}$
— On essaye de montrer $\mathscr{P}(x)$

Existence stricte

Pour prouver un énoncé du type $\exists! x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$

— On prouve $\exists x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$
— On prouve **l'unicité** d'un tel x

Égalité de deux ensembles

Pour prouver que deux ensembles sont égaux, on peut montrer que l'ensemble A est **inclus dans** l'ensemble B et vice-versa.

Un ensemble est inclus dans un autre

Pour prouver que E est inclus dans F, il faut utiliser le format suivant :

Montrons que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$

Prenons donc un élément de E c'est-à-dire `définition de l'élément`

Montrons que `cet élément` **appartient** à F c'est-à-dire que `cet élément` **vérifie** $\mathscr{P}\left(\mathbf{F}\right)$

Unicité

Pour montrer l'unicité d'une solution on peut montrer que : : si l'on essaye de chercher une autre variable aboutissant à la vérification de la propriété, on retrouvera forcément la même variable :

x vérifie la propriété

Soit y vérifiant aussi la propriété, alors $y = x$

Voir le PDF
