Sommes et produits

Sommes

Le symbole Σ

Note : l'indice de sommation est muet= ¬paramètre : : il n'a pas d'importance vis-à-vis de la formule.

Exemples : voir les démonstrations

Linéarité de la somme

Soient

— $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$
— $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$
— $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Notons que les dérivés et intégrales ont les mêmes propriétés, je me demande si cela à un lien avec les matrices Jacobiennes...

Voir la démonstration

Changements d'indices

Soient :

— $p \leqslant q$
— $a_p, ap+1, \dots, a_q \in \Bbbk$

Alors $\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{i=0}^{q-p} a_{i+p}$ On pose $i = k - p \Longleftrightarrow k = i + p$

On peut le démontrer par extension.

Voir les exemples de démonstrations

Sommes téléscopiques

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$

Alors, $\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k-1} - a_k) = a_n - a_1$

On peut le voir instantanément en développant.

Voir la démonstration

Sommes doubles

En fait, on somme tous les termes du tableau :

i\j	1	2	$\cdots$	m
1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1m}
2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{nm}

Voir la notation et la méthode de démonstration

Voir les exemples

Sommes classiques

Sommes des puissances d'entiers $\forall n \in \mathbb{N}^*$

— $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

— $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

— $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Voir la démonstration

Binôme de Newton

Triangle de Pascal $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Propriété Pour $k{,}n \in \mathbb{N}^{*2}{,}k \leqslant n$

— $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
— $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

On prouve cela par la définition de $\binom{n}{k}$

Formule du pion Pour $k{,}n \in \mathbb{N}^{*}{,}k \leqslant n$

$k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$

Formule du Binôme de Newton Soient $(a{,}b) \in \mathbb{K}^2, n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+k}$$

On démontre cette formule par récurrence

Sommes géométriques $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^n}{1-a}$

Si $a = 1$, la somme est égale à n

Factorisation de Bernoulli $a^n - b^n = (a-b) \times \sum\limits_{k=1}^{n} a^k \times b^{n-1-k}$

On remarque que pour $k = 1$, on revient sur la formule des sommes géométriques

Voir la démonstration

Divers $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k}$

Pour clore cette somme, on utilise le binôme de Newton et la formule du pion avec un changement d'indice comme transition.

Il est à noter que la formule du pion se démontre par l'expression de $\binom{n}{k}$

$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 \times \binom{n}{k}$

Il suffit d'utiliser le résultat précédent avec un peu d'astuce

Produits

Le symbole Π

Voir la notation

Produits à connaitre

- $\prod_{k=1}^{n} k = n!$
- $\prod_{k=1}^{n} \alpha = \alpha^n$
- $\prod_{k}^{n=1} k = 2 \times 4 \times \cdots \times 2n = 2 \times (2n) = 2 \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \cdots \times 2 \times n = 2^n \times n!$ $(k \in [\![1{,}2n]\!])$
- $\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$ $(k \in [\![1{,}2n+1]\!])$

Propriétés

- Simplification télescopique : $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_1}$
- Produit double : $\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{i,j} = \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} a_{i,j}$
- Produit double : $\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i}^{n} a_{i,j} = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{j} a_{i,j}$

Voir le PDF